



گزینه ۳

۱

در صورت مسئله از لفظ "و" استفاده شده است و تأکید شده که فقط یک مگان، یک سمند و یک پژو می‌توان انتخاب کرد، لذا از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$۴ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$$

گزینه ۳

۲

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{20}$$

$$n(n+1) = 20 \Rightarrow \begin{cases} n = -5 \times \\ n = 4 \checkmark \end{cases}$$

(n عددی طبیعی است.)

گزینه ۲

۳

برای حل این تست از اصل متمم کمک می‌گیریم. تعداد کل حالاتی که می‌توانیم ۳ نقطه از ۹ نقطه را به‌عنوان ۳ رأس مثلث انتخاب کنیم برابر با $\binom{9}{3}$ است. حال حالاتی را که نقاط انتخابی تشکیل مثلث نمی‌دهند را باید از کل حالات کم کنیم.

(۱) نقاط انتخابی روی خط AB باشند: $\binom{4}{3} = ۴$ حالت مختلف دارد.

(۲) نقاط انتخابی روی خط BC یا AD یا CD باشند: هرکدام $\binom{3}{3} = ۱$ حالت مختلف دارد.

بنابراین تعداد حالاتی که مثلث تشکیل نمی‌شود، برابر است با:

$$۴ + ۱ + ۱ + ۱ = ۷$$

طبق اصل متمم تعداد مثلث‌ها برابر است با:

$$\binom{9}{3} - ۷ = \frac{9!}{۶! \times ۳!} - ۷ = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۶} - ۷ = ۸۴ - ۷ = ۷۷$$

گزینه ۲

۴

چون هر شخص حداکثر می‌تواند به یک نفر رأی بدهد، پس می‌توان نتیجه گرفت هر شخص ۸ انتخاب دارد (یا به یکی از ۷ نامزد رأی می‌دهد یا به هیچ‌کدام رأی نمی‌دهد). پس:

$$۸ \times ۸ \times \dots \times ۸ = ۸^{۲۲}$$

هر نفر می‌تواند سه حالت داشته باشد (طلا - نقره - برتر):

$$\text{تعداد کل برندگان} : \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

$$\Rightarrow 56 \times 3! = 56 \times 6 = 336$$

ابتدا ۳ رقم از بین ارقام داده شده انتخاب می‌کنیم $\binom{4}{3}$. اما هر سه عدد که انتخاب کنیم تنها یک حالت رخ می‌دهد که "رقم یکان < رقم دهگان < رقم صدگان" باشد، مثلاً با انتخاب ۲، ۴ و ۶ تنها یک حالت ۲۴۶ وجود دارد، بنابراین تعداد کل اعداد با این شرط برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times 1 = 4$$

$$\frac{n!}{6!(n-6)!} = 2 \times \frac{n!}{5!(n-5)!} \Rightarrow \frac{5!(n-5)!}{6!(n-6)!} = 2$$

$$\frac{n-5}{6} = 2 \Rightarrow n-5 = 12 \Rightarrow n = 17$$

از هر پنج نقطه که روی دایره قرار دارد، می‌توان یک پنج ضلعی ساخت. پس انتخاب ۵ از ۱۰، تعداد پنج ضلعی‌ها است.

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 3 \times 7 \times 6 = 36 \times 7 = 252$$

برای انتخاب سه مهرهٔ هم‌رنگ یا هر سه باید سفید یا هر سه سیاه انتخاب شوند. از قرمزها نمی‌توان انتخاب کرد، زیرا دو مهره بیشتر نیستند. پس:

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$$

باید با ارقام ۰، ۲، ۴، ۶، ۸، اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بسازیم:

فقط ۰، ۲، ۴، ۶، ۸، ۲، ۴، ۶، ۸

۴	۵	۱
---	---	---

 $\Rightarrow 4 \times 5 \times 1 = 20$

این ۷ نفر را به عنوان ۷ جایگاه مختلف در نظر می‌گیریم. نفر اول به ۷ طریق می‌تواند یک لنگه کفش راست و به ۷ طریق می‌تواند یک لنگه کفش چپ را انتخاب کند. نفر دوم به ۶ طریق می‌تواند یک لنگه کفش راست و به ۶ طریق می‌تواند یک لنگه کفش چپ را انتخاب کند. به همین ترتیب اگر پیش برویم جواب سؤال برابر $7!^2$ خواهد شد.

$$\frac{7 \times 7}{\text{نفر اول}} \times \frac{6 \times 6}{\text{نفر دوم}} \times \frac{5 \times 5}{\text{نفر سوم}} \times \frac{4 \times 4}{\text{نفر چهارم}} \times \frac{3 \times 3}{\text{نفر پنجم}} \times \frac{2 \times 2}{\text{نفر ششم}} \times \frac{1 \times 1}{\text{نفر هفتم}} \\ = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)^2 = (7!)^2$$

حرف‌های e را کنار هم و حرف‌های t را نیز کنار هم قرار می‌دهیم:

tt	ee
----	----

$$sr \Rightarrow \text{تعداد کلمات} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

۱ شیء ۱ شیء

هر یک از جوایز مستقل از یکدیگر می‌توانند سهم نفر اول یا دوم شوند تعداد کل حالات پخش ۵ جایزه 2^5 است که در یک حالت همه جوایز به نفر اول و در یک حالت همه جوایز به نفر دوم می‌رسد که با کسر این دو حالت جواب مطلوب است: $32 - 2 = 30$

اگر تعداد مسیرهای از B به C را برابر m و تعداد مسیرهای از A به E را برابر n قرار دهیم، داریم:

$$2 \times m \times 2 + n \times 4 = 20 \Rightarrow m + n = 5 \Rightarrow \begin{cases} 1, 4 \\ 2, 3 \\ 3, 2 \\ 4, 1 \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، گزینه "۱" صحیح است.

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه مدرسه از پنج مدرسه}} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

طبق قاعده پاسکال داریم:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k} \\ 10 + \binom{10}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{5} &= \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{5} \\ &= \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{5} = \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{13}{5} \\ &= \binom{13}{4} + \binom{13}{5} = \binom{14}{5} \end{aligned}$$

سه نفر اول را دقیقاً از هر سه رشته و دو نفر بعد را از تمام رشته‌ها انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{2} = 5 \times 6 \times 3 \times 55 = 4950$$

طبق اصل ضرب: $5 \times 3 = 15$

نکته:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow n + (2n - 5) = 10$$

$$3n - 5 = 10 \Rightarrow 3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

اگر از A به B و از B بخوایم به شهر C برویم طبق اصل ضرب $4 \times 3 = 12$ راه وجود دارد و اگر مستقیم بخوایم از A به C برویم ۲ راه وجود دارد، بنابراین طبق اصل جمع تعداد کل راه‌ها برابر است با: $12 + 2 = 14$

برای تابع بودن از هر عضو A می‌توان به هر عضو B رفت بنابراین داریم:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

نکته: به‌طورکلی m^n تابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی وجود دارد.

حالات زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$EEEE00 \Rightarrow \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$EEEOA \Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

$$EEOOA \Rightarrow \frac{5!}{2!2!} = 30$$

$$\Rightarrow \text{درمجموع: } 10 + 20 + 30 = 60$$

$$\begin{aligned} \binom{5}{3} \times \binom{7}{3} &= 350: \text{سؤال ۵ از سؤال اول و ۳ سؤال از ۷ سؤال بعدی} \\ \binom{5}{4} \times \binom{7}{2} &= 105: \text{سؤال ۴ از سؤال اول و ۲ سؤال از ۷ سؤال بعدی} \\ \binom{5}{5} \times \binom{7}{1} &= 7: \text{سؤال ۵ از سؤال اول و ۱ سؤال از ۷ سؤال بعدی} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} 350 + 105 + 7 = 462$$

ارقام ۱، ۲، ۳، ...، ۹ را در نظر می‌گیریم. برای اینکه عدد سه‌رقمی فرد باشد، باید رقم یکان آن فرد باشد.

۸	۸	۵
---	---	---

 $\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 8 \times 8 \times 5 = 320$

$$\binom{2}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{2} = 2 \times 6 \times 15 = 180$$

ابتدا ۳ استان انتخاب می‌کنیم و از هر استان یک نفر (از ۵ نماینده) را برمی‌گزینیم:

$$\binom{4}{3} \times \binom{5}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{5}{1} = 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

$\downarrow$
انتخاب ۳ استان

$\downarrow$
انتخاب ۱ نفر از ۵ نماینده استان اول

$\downarrow$
انتخاب ۱ نفر از ۵ نماینده استان دوم

$\downarrow$
انتخاب ۱ نفر از ۵ نماینده استان سوم

ابتدا یک زن از زن‌ها و یک مرد از مردها انتخاب می‌کنیم: $\binom{۳}{۱} \binom{۴}{۱}$
 آن‌ها را در ابتدا و انتهای صف قرار می‌دهیم: $۲!$
 سپس بقیه افراد باقی‌مانده را در بین آن‌ها قرار می‌دهیم: $۵!$

$$\Rightarrow \binom{۳}{۱} \binom{۴}{۱} \times ۲! \times ۵! = ۱۲ \times ۲ \times ۱۲۰ = ۲۸۸۰$$

اگر آن کلمه را به صورت زیر نمایش دهیم، خانه سمت چپ به ۵ طریق، خانه وسط به ۴ طریق و خانه آخر به ۳ طریق پر می‌شود. اصل ضرب:

$$\square\square\square \Rightarrow ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$